ACTA UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS DE ATTILA JÓZSEF NOMINATAE
ACTA IUVENUM
SECTIO SCIENTIAE NATURALIS, SERIES NOVA, TOMUS I.
SZEGED, HUNGARIA, 1987

ÚJ IDŐMÉRÉSI ELV, A ZAJÓRA

TREFÁN GYÖRGY

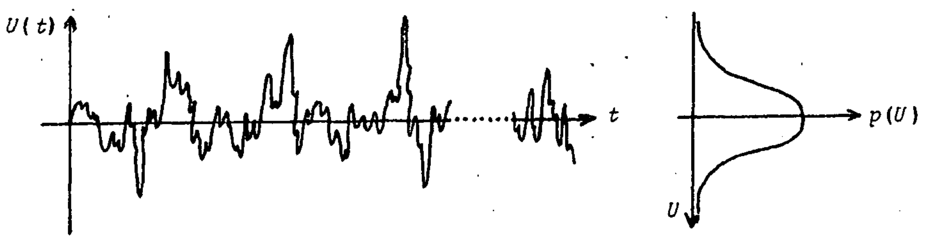
BEVEZETÉS

Az alábbiakban egy új időmérési elvről, a zajjal történő időmérés lehetőségéről lesz szó. Javaslatot teszünk egy lehetséges megvalósításra is és megvizsgáljuk a zajóra pontosságát befolyásoló tényezőket valamint azok hatását az időmérés pontosságára.

A ZAJOK MATEMATIKAI LEÍRÁSA

Egy időben folytonos, folytonos spektrumú jelet, mely értékeit véletlenszerűen veszi fel, zajnak nevezünk. Mivel a zaj véletlen folyamat, így leírására a valószínűségszámítás formalizmusát használhatjuk: a zaj rendelkezik várható értékkel, különböző rendű valószínűség-sűrűségfüggvényekkel stb.

A következőkben kifejtett megfontolások csak nulla várható értékű, Gauss-féle valószínűségi sűrűségfüggvénnyel rendelkező $U(t)$ zajokra vonatkoznak ($p(U)=(2\pi)^{-1/2}\sigma^{-1}\exp(-U^2/2\sigma^2)$, ahol σ a szórás) (1. *ábra*).



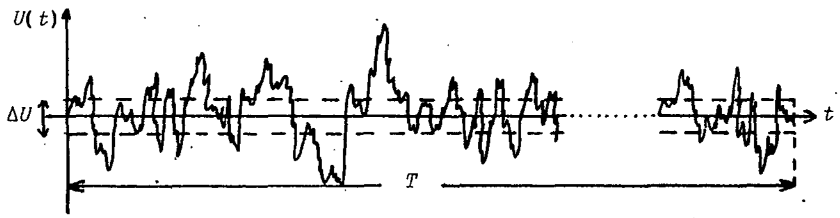
1. *ábra*. Nulla várható értékű, Gauss-féle valószínűségi sűrűségfüggvénnyel rendelkező zaj

Rice szerint [1] egy ilyen zaj nullátmenetei frekvenciájának a várható értékét, ν-t a

$$\nu = 2\sqrt{\frac{\int_0^\infty f^2 S(f)\,df}{\int_0^\infty S(f)\,df}} \tag{1}$$

formulával adhatjuk meg, ahol f a frekvencia, $S(f)$ pedig a zaj teljesítménysűrűség-spektruma. Az (1) formulához a Rice által használt bonyolult formalizmus nélkül is eljuthatunk a következő módon.

Tekintsünk a nulla várható értékű, Gauss-féle sűrűségfüggvénnyel rendelkező zajból - egy elegendően hosszú - T ideig tartó mintát! Vegyünk fel az $U=0$ szint körül egy elegendően kicsiny, ΔU szélességű sávot (2. *ábra*)!



2. *ábra* . T ideig tartó, zéró-centrált, Gauss-féle sűrűségfüggvénnyel rendelkező zaj

Ha az $U(t)$ jel a ΔU szélességű sávot várhatóan Δt idő alatt futja be, és T idő alatt ez n_0 alkalommal következik be, akkor az $U=0$ körüli, ΔU szélességű sávban való tartózkodás valószínűsége:

$$P(0,\Delta U) = n_0 \Delta t / T \tag{2}$$

A $\nu = n_0/T$ mennyiség így a nullátmenetek átlagos frekvenciája lesz, azaz

$$P(0,\Delta U) = \nu \cdot \Delta t \tag{3}$$

A $P(0,\Delta U)$ valószínűséget más szempontból tekintve is meghatározhatjuk. Ha a jel a ΔU szélességű sávot Δt idő alatt átlagosan v sebességgel futja be, akkor:

(4) $$U=v\cdot\Delta t$$

Ugyanakkor az $U=0$ körüli, kicsiny, ΔU szélességű sávban való tartózkodás valószínűsége arányos a ΔU sáv szélességével:

(5) $$P(0,\Delta U)=p(0)\cdot\Delta U,$$

ahol a $p(0)$ arányossági tényező a $p(U)$ valószínűségi sűrűségfüggvény $U=0$ helyen felvett értéke:

(6) $$p(0)=(2\pi)^{-1/2}\sigma^{-1}$$

a σ szórásról tudjuk [2], hogy $\sigma=\int_0^\infty S(f)df$.

Ismert tény az is [2], hogy a Gauss sűrűségfüggvényű zajra a nullátmenetek v várható sebessége arányos a $v_{eff}=(\langle v^2\rangle)^{1/2}$ ún. effektív sebességgel,

(7) $$v=k\cdot v_{eff},$$

ahol az arányossági tényezőt k-nak választottuk. A (3), (4), (5) és (7) egyenletekből a nullátmenetek várható frekvenciájára a

(8) $$\nu=k\cdot v_{eff}p(0)$$

kifejezés adódik. A $p(0)$ (6) kifejezésből és abból, hogy az effektív sebesség $v_{eff}=(\int_0^\infty f^2S(f)df)^{1/2}$ a (8) egyenletet a

(9) $$\nu=k(2\pi)^{1/2}\sqrt{\frac{\int_0^\infty f^2S(f)\,df}{\int_0^\infty S(f)\,df}}$$

alakban kapjuk.

Ezek után határozzuk meg (9)-ből egy f_0 körüli, Δf szélességű sávra korlátozott fehér zaj nullátmeneteinek a várható frekvenciáját! Mivel a zaj fehér, így $S(f)$=const., az integrálási határok pedig 0, illetve ∞ helyett rendre $f_0-\Delta f/2$, illetve $f_0+\Delta f/2$. Az adódik, hogy:

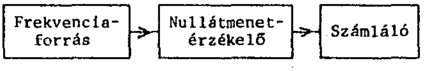
(10) $$\nu=k(2\pi)^{1/2}3^{-1/2}\sqrt{3f_0^2+(\Delta f/2)^2}$$

A $\Delta f\to 0$ esetben ν egyrészről egy f_0 frekvenciájú szinuszjel nullátmeneteinek a $\nu=2f_0$ frekvenciája, másrészről a (10)-ből $\nu=k(2\pi)^{1/2}f_0$. Mivel ν ugyanaz, így $k\cdot(2\pi)^{1/2}f_0=2f_0$, amiből k-ra $k=2/(2\pi)^{1/2}$ adódik, amit (9)-be helyettesítve (1)-hez jutunk.

Hangsúlyozzuk, hogy az (1) formula jelentősége az, hogy - elegendően hosszú ideig várva - ν stabil értékű frekvencia lesz.

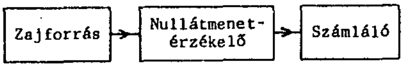
A ZAJÓRA ELVE

Amennyiben egy stabil frekvenciájú frekvenciaforrás jeleit egy nullátmenet-érzékelőbe vezetjük, amelynek jeleit megszámláljuk, akkor egy időmérő szerkezetet, órát nyerünk (3. *ábra*).



3. *ábra*. Az órák blokksémája

Az előbb láttuk, hogy a nullátmenetek várható frekvenciája hosszú időre nézve stabil, ezért ha a nullátmenet-számlálót Gauss-zajjal tápláljuk, akkor egy zajjal vezérelt időmérő eszközt, zajórát kapunk (4. *ábra*).



1. *ábra*. A zajóra blokksémája

A ZAJÓRA PARAMÉTEREI

A zajóra legfontosabb paraméterei a frekvenciája (ν) és a pontossága. Erre vonatkozóan teszünk néhány megfontolást a továbbiakban.

A zajóra frekvenciája a nullátmenetek frekvenciájának a várható értéke, így meghatározása az (1) formula alapján történik oly módon, hogy az $S(f)$ teljesítménysűrűség-spektrum konkrét alakját beírjuk, pl. ha a zaj fehér: $S(f)$=const.; ha a zaj $1/f$: $S(f)=1/f$; ha $1/f^2$: $S(f)=1/f^2$; ha f: $S(f)=f$; ha Lorentz-spektrumú: $S(f)=1/(1+(f/f_0)^2)$; stb., integrálni pedig a 0 és ∞ határok helyett az f_a alsó levágási, illetve f_f felső levágási frekvenciák között kell. Megjegyezzük, hogy a fehér, f illetve Lorentz-spektrumú zajokra az f_a alsó levágási frekvenciát nullának választottuk. A nyert eredményeket az 1. *táblázatban* foglaljuk össze:

1. *táblázat*. A zajóra frekvenciája különféle zajokra

A zaj típusa	fehér	f	$1/f$	$1/f2$	Lorentz
A zajóra frekvenciája	$2/\sqrt{3}\cdot f_f$	$\sqrt{2}f_f$	$\sqrt{2f_f(f_f+f_a)}$	$2\sqrt{f_f f_a}$	$2f_0\sqrt{\frac{f_f/f_0}{\mathrm{arctg}\ f_f/f_0}-1}$

A pontosságot - a gyakorlati-műszaki élettel összhangban - $\Delta\nu/\nu$-ként definiáljuk, ahol ν a zajóra frekvenciája, $\Delta\nu$ pedig ezen ν frekvencia - valamilyen okból bekövetkező - szórása.

Az egyik ok, ami miatt az óravezérlő ν frekvencia csúszkálhat, az, hogy az f_f felső ill. az f_a alsó levágási frekvencia egy Δf_f ill. Δf_a szélességű sávban fluktuálhat. Ennek a hatását úgy becsüljük meg - az egyszerűség kedvéért egyelőre csak az f_f felső levágási frekvencia fluktuációját tekintjük -, hogy az (1) formula alapján kiszámítjuk a zajóra ν' frekvenciáját, mikor a felső levágási frekvencia $f_f+1/2\Delta f_f$, aztán ugyanígy ha a felső levágási frekvencia $f_f-1/2\Delta f_f$, ebből egy ν'' frekvencia adódik. Akkor - ez ugyan a "legrosszabb esetre" adott becslés - $\Delta\nu=|\nu'-\nu''|$. Ezek után a $\Delta\nu/\nu$ definícióból adódik a pontosság. Mivel $\Delta\nu/\nu\ll 1$, ezért sorfejthetünk a konkrét számolás során, így egyszerűbb eredmény adódik. A 2. *táblázatban* összefoglaltuk azokat az eredményeket, amelyeket az f_f felső levágási frekvencia Δf_f szélességű sávban való fluktuációjának feltételezésével kaptunk a pontosságra.

Az 1. és 2. *táblázatból* levonjuk azt a következtetést, hogy mind a zajóra pontossága, mind a frekvenciája függ az óravezérlő zaj sávszélességétől, ui. függ az f_a ill. f_f levágási

2. *táblázat*. A zajóra pontossága, ha az f_f felső levágási frekvencia Δf_f szélességű sávban fluktuál. f_0^* a fluktuáló felső levágási frekvencia.

A zaj típusa	fehér	f	$1/f$	$1/f^2$	Lorentz
A zajóra pontossága	$\Delta f/f_0^*$	$\Delta f/f_0^*$	$\Delta f/(2f_0^*+f_a)$	$\Delta f/4f_0^*$	$\Delta f/2f_0^*$

frekvenciáktól.

A zajóra pontosságát befolyásoló másik tényező lehet az, hogy a nullátmenet-érzékelő a nullszintet dU bizonytalansággal érzékeli. Ekkor a zajóra ν^* frekvenciája - teljesen hasonlóan ahhoz a megfontoláshoz, amit a Rice-formula levezetésére mutattunk - könnyen meghatározható, csak az (5) kifejezésben az arányossági tényező nem a Gauss-függvény 0, hanem a dU helyen felvett értéke. Eredményként

(11) $$\nu^* \sim \exp(-dU^2/2\sigma^2)$$

adódik. Így a frekvencia szórása a "legrosszabb esetben" $\Delta\nu = |\nu^* - \nu|$, így a pontosságra a

(12) $$\Delta\nu/\nu = |\nu^*/\nu - 1|$$

kifejezést kapjuk. Beírva ν^* (11)-beli alakját (12)-be:

(13) $$\Delta\nu/\nu = |\exp(-dU^2/2\sigma^2) - 1|.$$

Kihasználjuk azt a gyakorlatban jól megvalósítható feltevést, hogy $dU^2 \ll \sigma^2$, így az exponenciális kifejezést sorbafejtve:

(14) $$\exp(-dU^2/2\sigma^2) = 1 - dU^2/2\sigma^2 + (1/2)dU^4/4\sigma^4 - \ldots,$$

a második tagnál megállva, visszahelyettesítve (13)-ba a pontosságra az adódik, hogy:

(15) $$\Delta\nu/\nu \sim (dU)^2,$$

azaz a nullérzékelési bizonytalanság másodrendűen kicsiny hibát okoz.

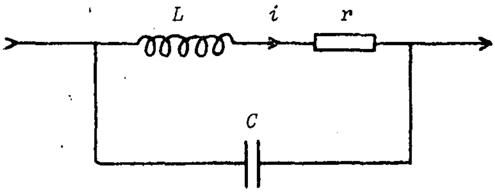
A zajóra elvéből látszik, hogy többletpontatlanságot okoz az, ha az óravezérlő f_0 középponti frekvencia ingadozik. Ha ez az ingadozás Δf effektív sávszélességgel bír, akkor az általa T idő alatt okozott $\Delta T/T$ relatív pontatlanságra egy felső becslést adhatunk [3]:

(16) $$\Delta T/T=(T\cdot f\cdot Q)^{-1/2},$$

ahol Q a jósági tényező: $Q=f/\Delta T$.

A rezonátoros zajórák esetét - meglepő tulajdonsági miatt - külön tárgyaljuk egy illusztratív példán.

Ha egy oszcillátorba épített párhuzamos rezgőkör (5. *ábra*) tekercsén átfolyó áram nullátmeneteit tekintjük,



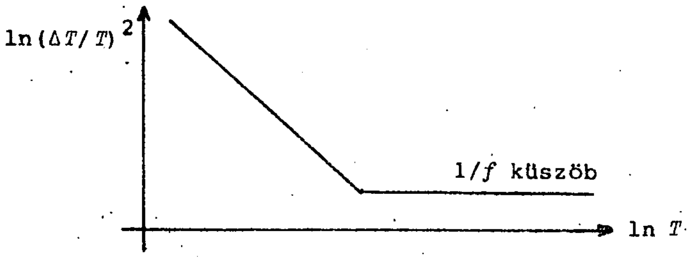
5. *ábra*. Párhuzamos rezgőkör

akkor ennek frekvenciája:

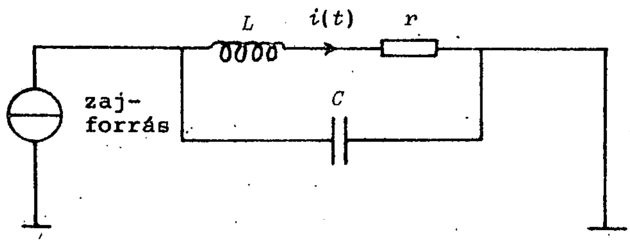
(17) $$\nu=2f_0(1-1/Q)^{1/2},$$

ahol a Q a rezgőkör jósági tényezője, azaz $Q=rL/C$ és f_0 a Thompson-formulából adódó frekvencia: $f_0=1/(2\pi\sqrt{LC})$. Így, ha az r ellenállásnak $1/f$ zaja van, akkor az oszcillátor - és a vele épített óra - frekvenciája is fluktuál oly módon, hogy - elég hosszú idő után a mérési idő növekedésével nem nő a pontosság, azaz az órának pontossági küszöbe van. Ezt a küszöböt nevezzük $1/f$ küszöbnek (6. *ábra*). Az $1/f$ küszöb létét az oszcillátorokban Gagnepain mutatta ki 1983-ban [4].

Ha azonban ugyanezt a rezgőkört fehér zajjal tápláljuk (7. *ábra*), a tekercsen átfolyó áram nullátmenetei várható frekvenciáját igen egyszerű módon adhatjuk meg: $\nu=2\cdot f_0$, ahol f_0 a fent említett Thompson-frekvencia [3].

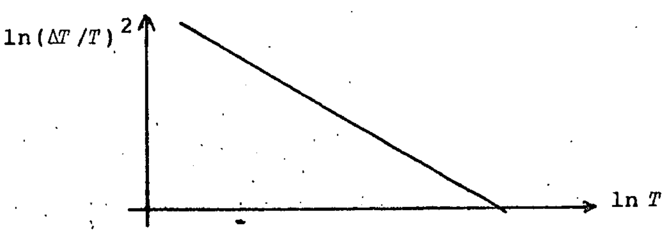


6. *ábra*. Az $1/f$ küszöb az oszcillátorokban



7. *ábra*. Fehér zajjal táplált rezgőkör

Látszik, hogy ez a frekvencia nem függ az ellenállástól, következésképpen annak fluktuációjától sem. Így egy rezonátoros zajóra pontosságát nem határolja az $1/f$ küszöb (8. *ábra*), tehát

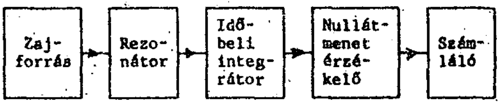


8. *ábra*. A rezonátoros zajórának nincs $1/f$ küszöbe

a zajóra pontosabb lehet elegendően nagy jósági tényezőjű rezonátor esetén, mint a klasszikus órák.

A rezonátoros zajóra fentebb említett előnyös tulajdonsága alapján a zajóra megvalósítására adott javaslatunk a következő:

egy fehér zajjal táplált rezonátor jeleit egy időintegrátorba vezetjük, mely által adott jelek nullátmeneteit érzékeljük, ill. számláljuk (9. *ábra*).



9. *ábra*. A zajóra javasolt megvalósítása

E helyen szeretném megköszönni témavezetőimnek, Kiss László Bélának, JATE Kísérleti Fizikai Intézet tanársegédjének és Ambrózy Andrásnak BME Elektronikai Technológia Tanszék tanszékvezető egyetemi tanárának a munkámhoz nyújtott nélkülözhetetlen segítségüket.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] S. O. Rice, Mathematical analysis of random noise, *Bell System Tech. J.*, 23, 1944.

[2] A. Ambrózy, *Electronic Noise*, Mc Graw Hill, New York, 1981.

[3] L. B. Kiss, A. Ambrózy, Time measurement by noise; reduction of flicker-floor, *Noise in Phisical Systems* - 1985., Ed. A. D'Amico, North-Holland, Amsterdam, 1986.

[4] J. J. Ganepain, Phase and frequency noises in oscillators, invited paper, *Noise in Physical Systems and 1/f Noise*, Eds. M. Savelli, G. Lecoy, J. - P. Nougier, North-Holland, Amsterdam, 1983.

Trefán György

V. évf. fizikus hallgató
Nyíradony, Ady E. u. 32., 4254